共通学力試験

数学

時 間　60分

学習のポイント

高校での履修内容の範囲内で出題しますので、「数学Ⅰ」「数学A」の学習を振り返る必要があります。教科書の内容をしっかり理解し、教科書の演習問題を解くことによって、基本的な力を身につけます。まずは、この基礎的な学習に十分な時間を使うことが大切です。その上で、センター試験の「数学Ⅰ・数学A」に対応した問題集を基礎知識の確認とともに解いていくのが最も効果的な学習となります。

問題 1

⑴　$x=\dfrac{1}{4-2\sqrt{5}}$，$y=\dfrac{1}{4+2\sqrt{5}}$ であるとき，次の値をそれぞれ求めなさい。

①　$x^2+y^2=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$

②　$x-y=\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$

⑵　不等式 $\dfrac{1}{2}x-1<\dfrac{x+4}{3}<x-2$ の解は，$\boxed{\text{オ}}<x<\boxed{\text{カキ}}$ である。

⑶　x を実数とする。次の $\boxed{\text{ク}}$ にあてはまるものを，下の 1.～4. の中から選べ。

$6x^2+7x-3>0$ であることは，$x>1$ であるための $\boxed{\text{ク}}$ 。

1．必要条件であるが，十分条件ではない

2．十分条件であるが，必要条件ではない

3．必要条件かつ十分条件である

4．必要条件，十分条件のいずれでもない

⑷　次のデータは，あるサッカーチームの最近 16 試合の得点である。

2，0，3，0，4，1，3，2，4，0，2，1，0，6，0，1

このデータの中央値は $\boxed{\text{ケ}}\,.\,\boxed{\text{コ}}$ であり，最頻値は $\boxed{\text{サ}}$ である。

問題 2

a を実数の定数とし，x の 2 次関数

$$y = x^2 - (a+3)x + a^2 \quad \cdots\cdots (A)$$

がある。

(1)　2 次関数(A)のグラフが x 軸と異なる 2 点 P，Q で交わるような a の値の範囲は，

$\boxed{アイ} < a < \boxed{ウ}$ である。

また，線分 PQ の長さが $\sqrt{3}$ であるとき，$a = \boxed{エ} \pm \sqrt{\boxed{オ}}$ である。

(2)　$0 \leqq x \leqq 2$ における 2 次関数(A)の最大値が 6 になるのは，

$$a = \boxed{カキ},\ \sqrt{\boxed{ク}}$$

のときである。

また，$0 \leqq x \leqq 2$ における 2 次関数(A)の最小値は，

$a = \boxed{カキ}$ のとき $\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ であり，

$a = \sqrt{\boxed{ク}}$ のとき $\boxed{シ} - \boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}$ である。

問題 3

(1) ① 3468 を素因数分解すると，3468 ＝ $\boxed{\text{ア}}^{2}\cdot\boxed{\text{イ}}\cdot\boxed{\text{ウエ}}^{2}$ である。

② $\dfrac{3468}{91}$，$\dfrac{136}{63}$ のどちらに掛けても積が自然数となる分数のうち，最小のものは，

$\dfrac{\boxed{\text{オカキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(2) 6 個の数字 0，1，2，3，4，5 から，異なる 4 個を並べて 4 桁(けた)の整数をつくる。この 4 桁の整数について，以下の問いに答えなさい。

① 4 桁の整数は全部で $\boxed{\text{コサシ}}$ 個ある。

② 3200 以上の 4 桁の整数は $\boxed{\text{スセソ}}$ 個ある。

③ 4 桁の整数のうち 4 の倍数は $\boxed{\text{タチ}}$ 個ある。

問題 4

△ABC において，AB ＝ 2，AC ＝$\sqrt{7}$，∠ABC ＝ 60° とする。辺 BC を 2：3 に内分する点を D とする。3 点 A，B，D を通る円と辺 AC の交点のうち，A でない方を E とする。

(1) BC＝$\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) AD ＝ $\dfrac{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，3 点 A，B，D を通る円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

(3) AE ＝ $\dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ であり，△ABE の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

解答一覧表

数学 A

2016/9/14

問題1 小計25点

記号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	
正答	9	2	−	5	5	1	4	1	1	5	0	
配点		3		4			6	6		3	3	25

問題2 小計25点

記号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	
正答	−	1	3	1	3	−	2	6	1	5	4	4	2	6	
配点			5		5			5			5			5	25

問題3 小計25点

記号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
正答	2	3	1	7	8	1	9	6	8	3	0	0	1	5	6	7	2	
配点				4					6			4			5		6	25

問題4 小計25点

記号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	
正答	3	2	1	9	5	2	5	7	1	5	8	7	3	5	1	2	3	3	5	
配点	4				4					4				6					7	25

問題 1

⑴①　(ア)＝9，(イ)＝2

$$x+y=\frac{1}{4-2\sqrt{5}}+\frac{1}{4+2\sqrt{5}}=\frac{4+2\sqrt{5}+4-2\sqrt{5}}{\left(4-2\sqrt{5}\right)\left(4+2\sqrt{5}\right)}$$

$$=\frac{8}{16-20}=-\frac{8}{4}=-2$$

$$xy=\frac{1}{4-2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{4+2\sqrt{5}}=\frac{1}{\left(4-2\sqrt{5}\right)\left(4+2\sqrt{5}\right)}$$

$$=\frac{1}{16-20}=-\frac{1}{4}$$

$$x^2+y^2=\left(x+y\right)^2-2xy$$

$$=\left(-2\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$=4+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{9}{2}$$

②　(ウ)＝－，(エ)＝5

$$\left(x-y\right)^2=x^2-2xy+y^2$$

$$=\frac{9}{2}-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=5$$

ここで，$x<0$，$y>0$ より，$x-y<0$ だから，

$$x-y=-\sqrt{5}$$

⑵　(オ)＝5，(カ)＝1，(キ)＝4

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x-1<\frac{x+4}{3} & \cdots\cdots① \\ \frac{x+4}{3}<x-2 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

とする。

①より，

$$3x-6<2x+8$$
$$x<14$$

②より，

$$x+4<3x-6$$
$$-2x<-10$$
$$x>5$$

よって，$5<x<14$

⑶　(ク)＝1

$$6x^2+7x-3>0$$
$$(3x-1)(2x+3)>0$$

より，

$$x<-\frac{3}{2}\ ,\ \ \frac{1}{3}<x$$

「$6x^2+7x-3>0 \Longrightarrow x>1$」は，$x=-2$ が反例となるので，偽であり，
「$x>1 \Longrightarrow 6x^2+7x-3>0$」は，真である。
よって，$6x^2+7x-3>0$ であることは，$x>1$ であるための必要条件であるが，十分条件ではない。

⑷　(ケ)＝1，(コ)＝5，(サ)＝0
データを小さい順に整理すると，

0，0，0，0，0，1，1，1，2，2，2，3，3，4，4，6

中央値は，$\dfrac{1+2}{2}=1.5$

最頻値は，0

問題２

⑴　(ア)＝−，(イ)＝1，(ウ)＝3，(エ)＝1，(オ)＝3

$x^2-(a+3)x+a^2=0$ の判別式を D とすると，2 点で交わるための条件は，$D>0$ だから，

$$D=(a+3)^2-4a^2>0$$
$$a^2+6a+9-4a^2>0$$
$$-3a^2+6a+9>0$$
$$a^2-2a-3<0$$
$$(a+1)(a-3)<0$$

よって，$-1<a<3$

x 軸との交点 P，Q の x 座標が，

$$x=\frac{a+3\pm\sqrt{-3a^2+6a+9}}{2}$$

だから，線分 PQ の長さは，

$$\frac{a+3+\sqrt{-3a^2+6a+9}}{2}-\frac{a+3-\sqrt{-3a^2+6a+9}}{2}=\sqrt{-3a^2+6a+9}$$

よって，

$$\sqrt{-3a^2+6a+9}=\sqrt{3}$$
$$-3a^2+6a+9=3$$
$$-3a^2+6a+6=0$$
$$a^2-2a-2=0$$
$$a=1\pm\sqrt{3}$$

⑵　(カ)＝−，　(キ)＝2，(ク)＝6，(ケ)＝1，(コ)＝5，(サ)＝4，(シ)＝4，(ス)＝2，(セ)＝6

$f(x)=x^2-(a+3)x+a^2$ とおく。

$$f(x)=\left(x-\frac{a+3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{2}a-\frac{9}{4}$$

(ｉ)　$\frac{a+3}{2}\leqq 1$ のとき，すなわち，$a\leqq -1$ のとき，

(A)は $x=2$ で最大値をとるから，

$$f(2)=2^2-(a+3)\cdot 2+a^2=6$$
$$a^2-2a-2=6$$
$$a^2-2a-8=0$$
$$(a+2)(a-4)=0$$

よって，$a=-2$，4

$a\leqq -1$ より，$a=-2$

このとき，$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$

よって，(A)は $x=\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{15}{4}$ をとる。

(ⅱ)　$\frac{a+3}{2}>1$ のとき，すなわち，$a>-1$ のとき，

(A)は $x=0$ で最大値をとるから，

$$f(0)=a^2=6$$

$a=\pm\sqrt{6}$

$a>-1$ より，　$a=\sqrt{6}$

このとき，　$f(x)=\left(x-\dfrac{\sqrt{6}+3}{2}\right)^2+\dfrac{9-6\sqrt{6}}{4}$

$\dfrac{\sqrt{6}+3}{2}>2$ より，(A)は $x=2$ で最小値をとり，その値は，

$$f(2)=2^2-(\sqrt{6}+3)\cdot 2+(\sqrt{6})^2=4-2\sqrt{6}$$

である。

問題 3

⑴①　(ア)＝2，(イ)＝3，(ウ)＝1，(エ)＝7

$3468 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17^2$

②　(オ)＝8，(カ)＝1，(キ)＝9，(ク)＝6，(ケ)＝8

求める分数を $\dfrac{b}{a}$ （a と b は互いに素な自然数）とする。$\dfrac{3468}{91}$，$\dfrac{136}{63}$ はいずれも既約分数であるから，

$\dfrac{3468}{91} \times \dfrac{b}{a}$ が自然数となることより，a は 3468 の約数，b は 91 の倍数

$\dfrac{136}{63} \times \dfrac{b}{a}$ が自然数となることより，a は 136 の約数，b は 63 の倍数

求める分数は最小のものだから，a は 3468 と 136 の最大公約数，b は 91 と 63 の最小公倍数であればよい。（このとき，a と b は互いに素になる。）

$3468 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17^2$，$136 = 2^3 \cdot 17$

より，$a = 2^2 \cdot 17 = 68$

$91 = 7 \cdot 13$，$63 = 3^2 \cdot 7$

より，$b = 3^2 \cdot 7 \cdot 13 = 819$

よって，$\dfrac{819}{68}$

⑵①　(コ)＝3，(サ)＝0，(シ)＝0

千の位は 0 以外の 5 通り。

そのそれぞれについて，百，十，一の位の並べ方が ${}_5\mathrm{P}_3$ 通り。

よって，求める個数は，

$5 \times {}_5\mathrm{P}_3 = 5 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ （個）

②　(ス)＝1，(セ)＝5，(ソ)＝6

(ｉ)　千の位が 4，5 のとき

百，十，一の位の並べ方は ${}_5\mathrm{P}_3$ 通り。

よって，$2 \times {}_5\mathrm{P}_3 = 120$ （個）

(ⅱ)　千の位が 3 のとき

百の位は，2，4，5 の 3 通り。

そのそれぞれについて十，一の位の並べ方は ${}_4\mathrm{P}_2$ 通り。

よって，$1 \times 3 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 3 \cdot 12 = 36$ （個）

(ｉ)，(ⅱ)より，$120 + 36 = 156$ （個）

③　(タ)＝7，(チ)＝2

4 の倍数は下 2 桁が 4 の倍数のときである。

(ｉ)　下 2 桁が 04，20，40 のとき

千，百の位の並べ方は ${}_4\mathrm{P}_2$ 通り。

よって，$3 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 36$ （個）

(ⅱ)　下 2 桁が 12，24，32，52 のとき

千の位は，下 2 桁の数字と 0 以外の 3 通り。

そのそれぞれについて百の位は 3 通り。

よって，$4 \times 3 \times 3 = 36$ （個）

(ｉ)，(ⅱ)より，$36 + 36 = 72$ （個）

問題 4

⑴　(ア)＝3

BC＝x とおくと，△ABC に余弦定理を用いて，

$$2^2+x^2-2\cdot 2\cdot x\cos 60°=\left(\sqrt{7}\right)^2$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$(x+1)(x-3)=0$$
$$x=-1,\ 3$$

$x>0$ より，　$x=3$

⑵　(イ)＝2，(ウ)＝1，(エ)＝9，(オ)＝5，(カ)＝2，(キ)＝5，(ク)＝7，(ケ)＝1，(コ)＝5

$$\mathrm{BD}=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$$

△ABD に余弦定理を用いて，

$$\mathrm{AD}^2=2^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2-2\cdot 2\cdot\frac{6}{5}\cos 60°$$
$$=4+\frac{36}{25}-\frac{12}{5}=\frac{76}{25}$$

AD＞0 より，　$\mathrm{AD}=\dfrac{2\sqrt{19}}{5}$

求める円の半径を R とすると，△ABD に正弦定理を用いて，

$$2R=\frac{\mathrm{AD}}{\sin 60°}$$
$$R=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{19}}{5}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{57}}{15}$$

⑶　(サ)＝8，(シ)＝7，(ス)＝3，(セ)＝5，(ソ)＝1，(タ)＝2，(チ)＝3，(ツ)＝3，(テ)＝5

方べきの定理より，

$$\mathrm{CE}\cdot\sqrt{7}=3\times\frac{3}{5}\cdot 3$$
$$\mathrm{CE}=\frac{27}{5\sqrt{7}}=\frac{27\sqrt{7}}{35}$$

よって，

$$\mathrm{AE}=\sqrt{7}-\frac{27\sqrt{7}}{35}=\frac{8\sqrt{7}}{35}$$

△ABC に正弦定理を用いて，

$$\frac{3}{\sin\angle\mathrm{CAB}}=\frac{\sqrt{7}}{\sin 60°}$$
$$\sin\angle\mathrm{CAB}=\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

よって，△ABE の面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{8\sqrt{7}}{35}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{12\sqrt{3}}{35}$$